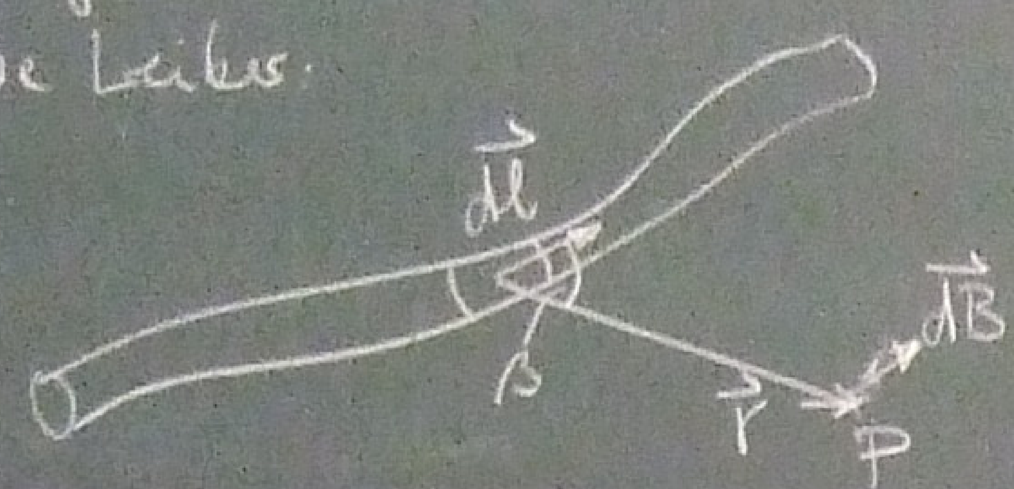
Biot-Savart'sches Gesetz

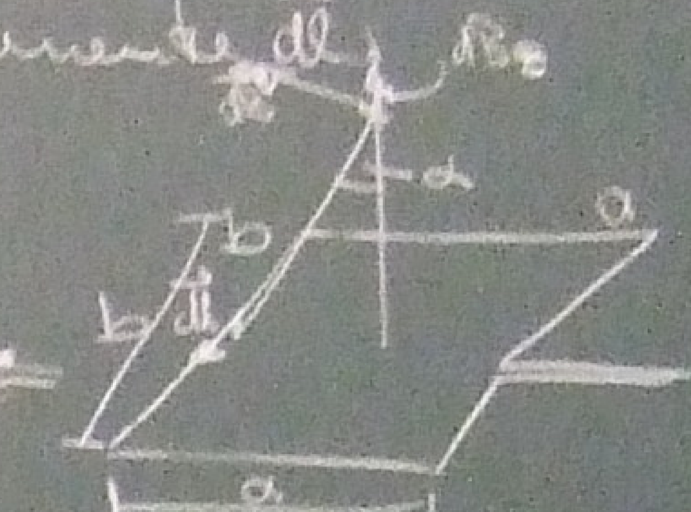
Ampère'sche Gesetz nur für einfache Geometrien gültig; nämlich für gerade, ausgedehnte Leiter.

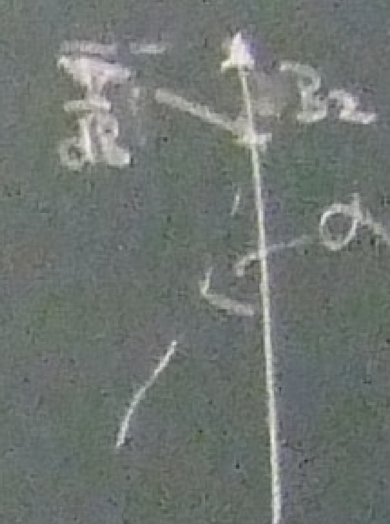


$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{dl} \times \vec{r}/r}{r^2}$$

$$|\vec{dl} \times \vec{r}/r| = dl \sin\beta$$

Gesamtfeld $\vec{B}$ in Punkt P durch Integration über alle Leiterelemente $\vec{dl}$





B_z für $z \gg a, b$

$B_x, B_y = 0$ für $z \gg a, b$

mit $\beta \measuredangle \vec{dl}, \vec{r} \approx 90$

$\sin\beta \approx 1$

$\alpha \measuredangle \vec{r}, \vec{e}_z$

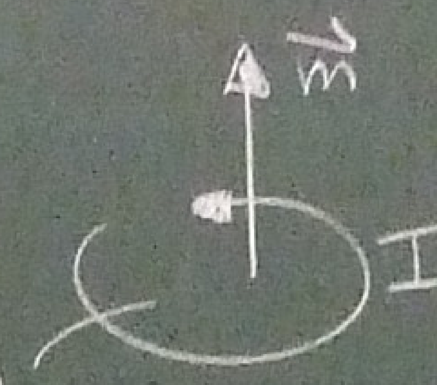
$\sin\alpha \approx \frac{a/2}{r} \approx \frac{b/2}{r}$

$$dB_z = \frac{\mu_0 I\, dl}{4\pi r^2} \sin\beta \cdot \sin\alpha$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\Big(\underbrace{2b \frac{a/2}{r}}_{\text{über } 2 \times \vec{b}} + 2a \cdot \frac{b/2}{r}\Big)$$

$$B_z = \mu_0 \cdot \frac{Iab}{2\pi r^3}$$

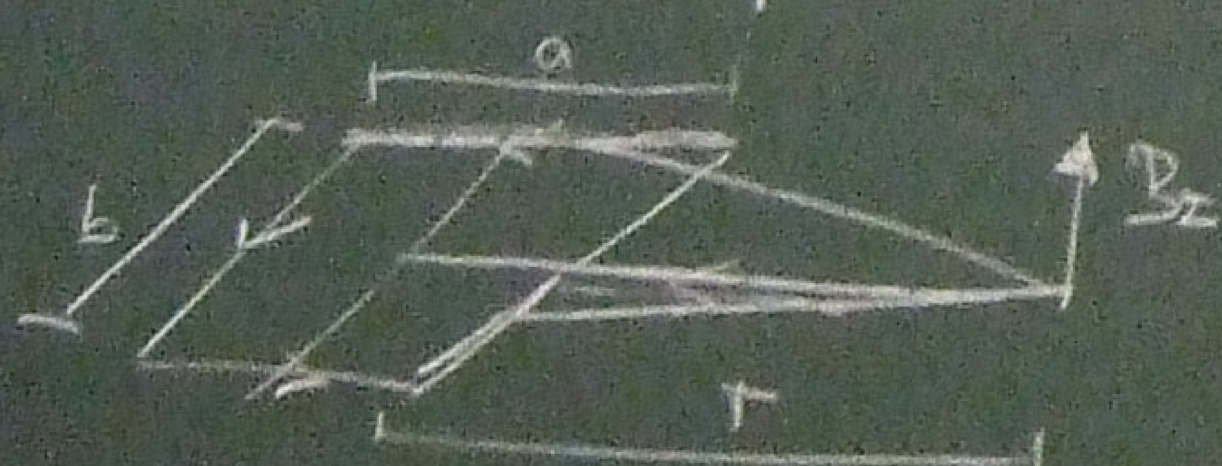
Verallgemeinert: $I \cdot a \cdot b =$ Strom $\cdot$ Fläche $= m$ (Strom um eine Fläche) $\boxed{\text{Magnetische Moment}}$



$$B_z(x, y = 0) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{r^3} \quad (z \gg a, b)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[-2\frac{ab}{r^3} + \frac{ab}{r^3}\right] = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ab}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3}$$

In der x-y-Ebene auf der x-Achse



Entlang b: $B_z = \pm \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{b}{(r \pm a/2)^2}$

wegen $\beta = \measuredangle b, r \approx 90°$

Entlang a: $B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{r^2} \cdot \frac{b/2}{r} 2$

Damit

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\underbrace{\frac{(r - a/2)^2 - (r + a/2)^2}{(r^2 - a^2/4)^2}}_{-2rab/r^4} + \frac{ab}{r^3}\right]$$

$=$

Vektorpotential $\vec{A}$

$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ analog zu $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\,dV_2$$

Magnetische Momente

- Elektron im Atom: magnetische Bohrmomente
- Erde: Magnetischer Dipol $m = 10^{26}\,\mathrm{Am}^2$ entspräche einem äquatorialen Kreisstrom von $10^{12}\,\mathrm{A}$.

Drehmoment auf magnetisches Moment im homogenen Magnetfeld:

$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ Analog: $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$

Energie $W = -\vec{m}\cdot\vec{B}$

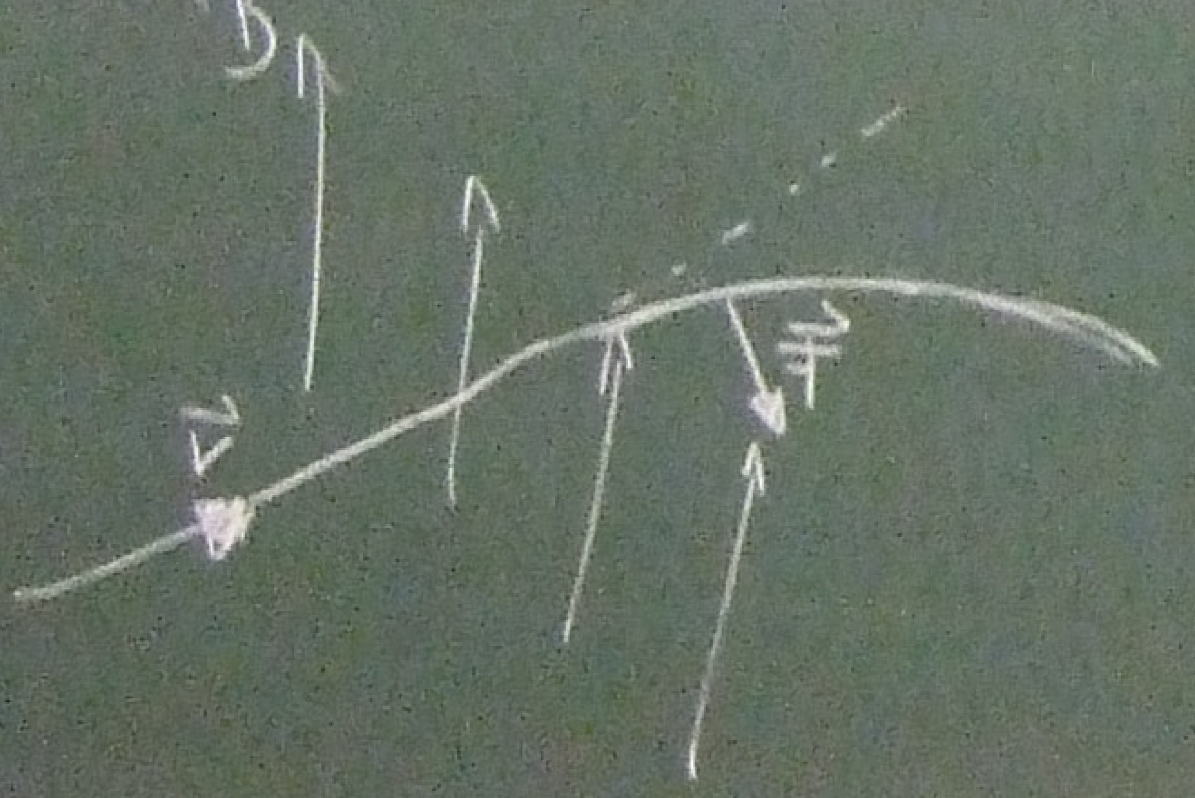
Kraft auf bewegte Ladung im Magnetfeld

Positive Ladung q mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ im Feld $\vec{B}$

$\vec{F}/L = \vec{I} \times \vec{B} \sim \vec{F} = \underbrace{L\cdot\vec{I}}_{q\cdot\vec{v}} \times \vec{B}$ $\left[m\frac{C}{s} = \frac{m}{s}C\right]$

Strom als Bewegung einer Ladung:

$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ Lorentzkraft



Wegen $\vec{F} \perp \vec{v}$ ändert sich nur die Richtung, nicht $|\vec{v}|$

Die kinetische Energie geladener Teilchen bleibt beim Durchfliegen magnetischer Felder unverändert.

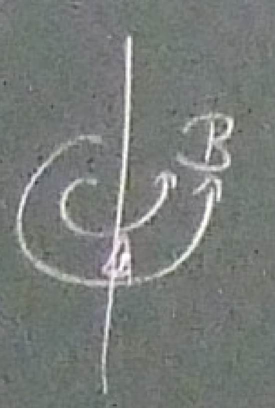
Gesamtkraft: $\vec{F} = q\cdot\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$

Der Verschiebungsstrom

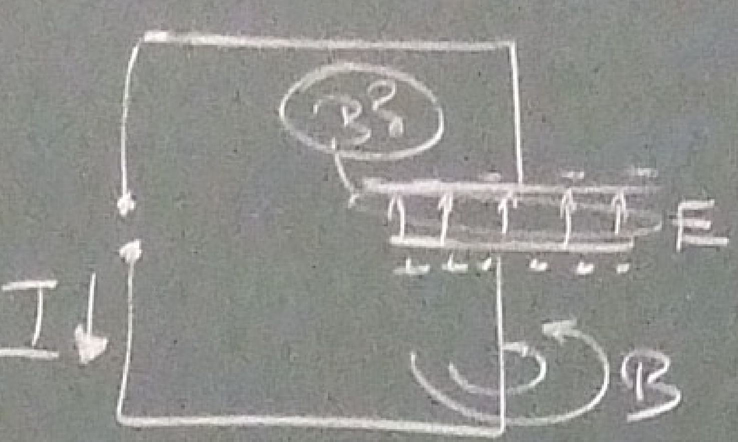
Erweiterung des Ampère'schen Gesetzes

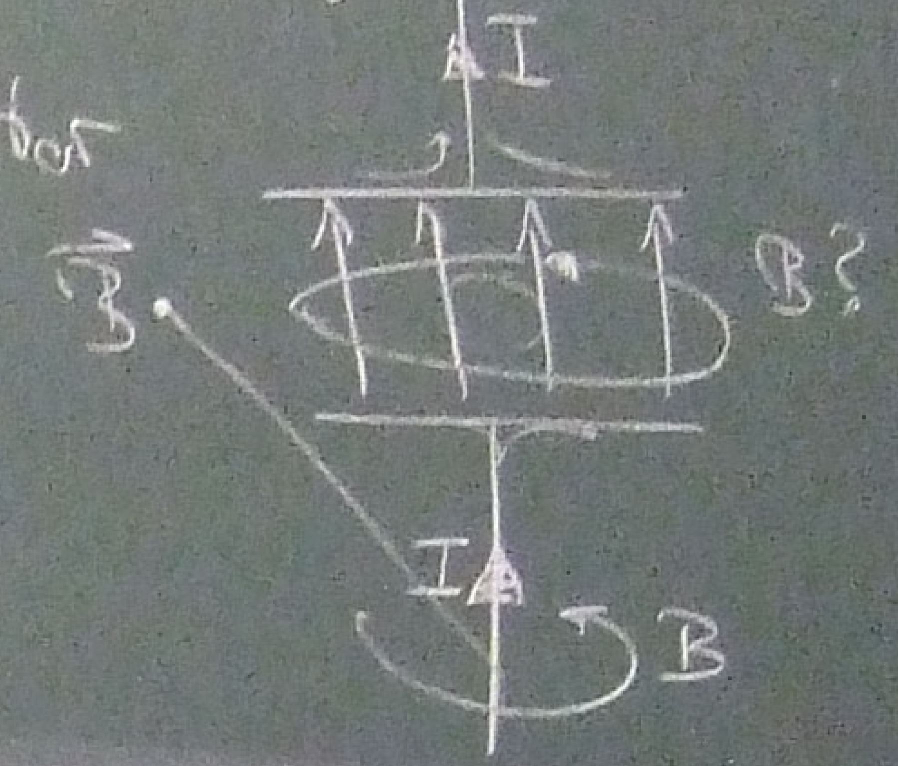
$$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 I + \;?$$

$$\sim \frac{d}{dt} \iint \vec{E}\, d\vec{A}$$



d.h. ein sich ändernder elektrischer Feld $\dot{\vec{E}}$ hat ein Magnetfeld zur Folge. Begründung mit einem sich aufladenden Kondensator





Ein auf Kondensator fließender Strom hat ein sich änderndes E-Feld zur Folge:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{A\varepsilon_0} \rightsquigarrow q = A\varepsilon_0 E$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} A\varepsilon_0 E = \underbrace{A\varepsilon_0 \frac{dE}{dt}}$$

$$\underset{\text{Verallg.}}{=} \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Verschiebungs-Strom durch Aufbauen des Feld

$$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 I_0 + \mu_0 I_{\text{Verschiebung}}$$

$$= \mu_0 + \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{= \frac{1}{c^2}} \frac{d}{dt} \iint \vec{E}\, d\vec{A}$$

Differentiell: $\boxed{\text{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}}}$