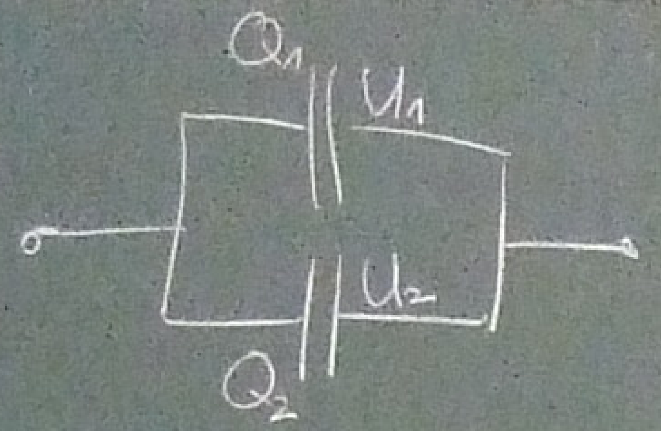
Pallelschaltung von Kapazitäten

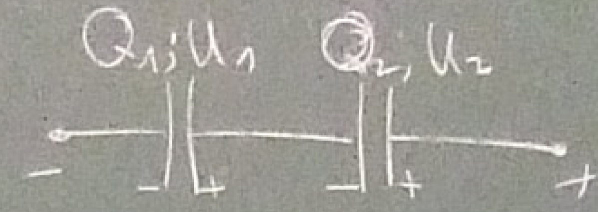


An beiden Kond. liegt gleiche Spannung

$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 U_1 + C_2 U_2$

$= (C_1 + C_2) U \Rightarrow C = C_1 + C_2$

Serienschaltung



$U = U_1 + U_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$

$= Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \stackrel{!}{=} \frac{Q}{C}$

$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$

Energie im elektrischen Feld

Kondensator:

Um Ladung auf einen Kond. aufzubringen, muß Arbeit gegen bereits existierende Ladung geleistet werden $(\varphi_1 - \varphi_2)$

Bisher: $U \neq f(Q)$ und $W = q \cdot U$

Sonst: $dW = U \cdot dq = \frac{q}{C} dq$ bei Spannung U am Kondensator

$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$: Energie im Kondensator

$= \frac{1}{2} C U^2$

Beispiel Plattenkondensator

$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 d}{2 \varepsilon_0 A} = \frac{E^2 A^{\cancel{2}} \varepsilon_0^{\cancel{2}} d}{2 \cancel{\varepsilon_0} \cancel{A}} = \frac{\varepsilon_0 E^2 A \cdot d}{2}$

$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ $\quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A \varepsilon_0}$

Energiedichte $w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$

$V = A d$

$W = \iiint w \, dV = \iiint \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$

$Q = \text{const} = C \cdot U$

$= \frac{\varepsilon_0 A}{d} \cdot U$

$U \sim d$

Materie im elektrischen Feld

Bisher: Ladungen & Felder im Vakuum

Nun: Isolator im elektrischen Feld

a) Kondensator geladen, trennen ihn von der Spannungsquelle ($Q = \text{const}$) und schieben den Isolator ein.

$Q = C \cdot U = \text{const}$

U sinkt um einen Faktor $1/\varepsilon$

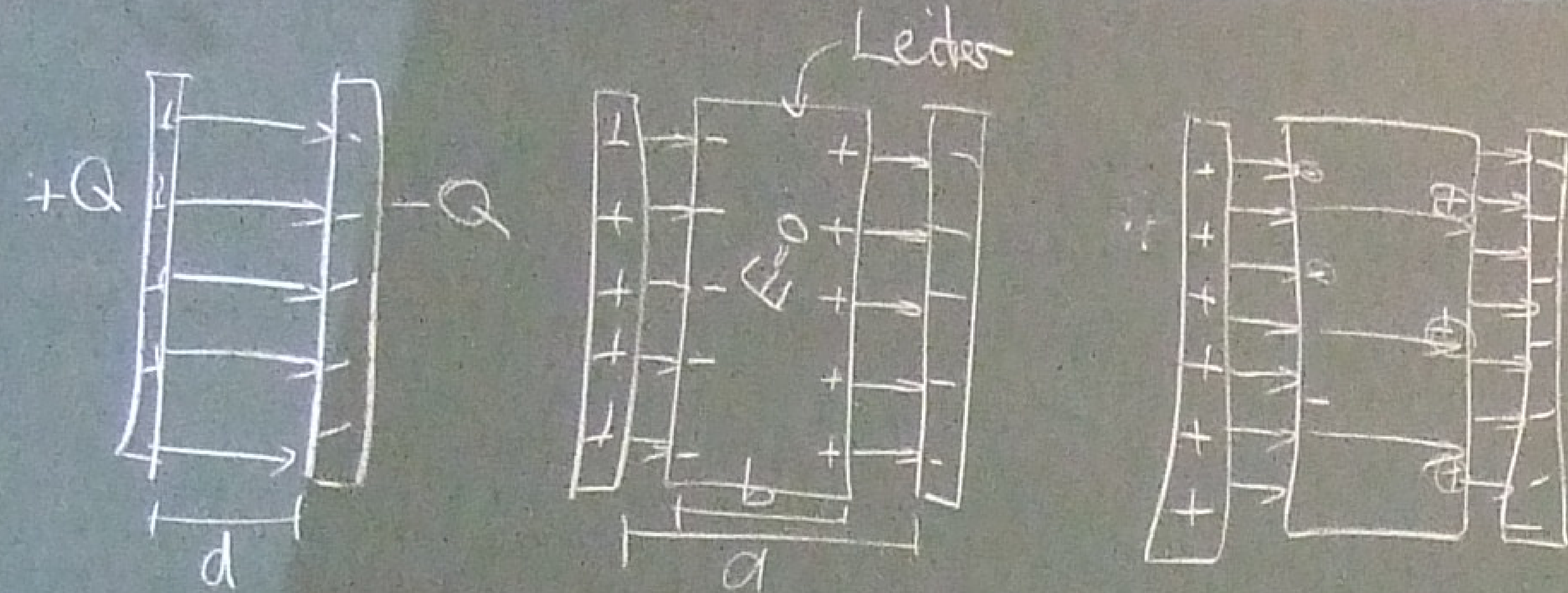
b) Kondensator auf konst. Spannung ($\exists$ ein Zufluß/Abfluß von Ladung)

$Q = C \cdot U$ const

Q steigt um den Faktor ε

Resultat:

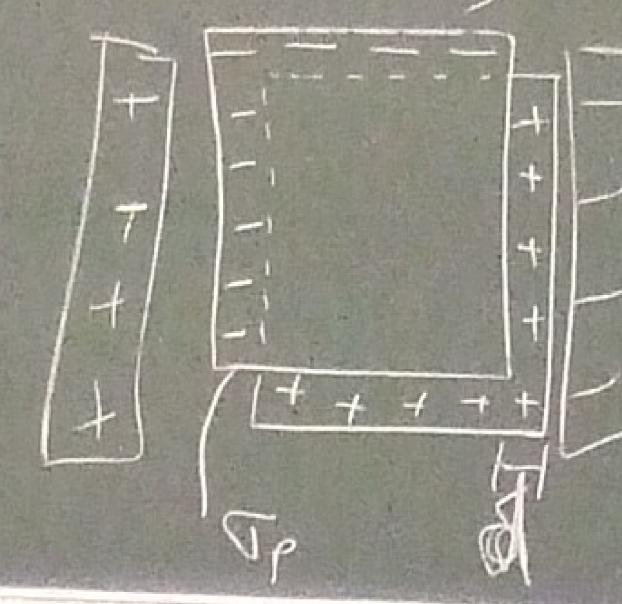
$C_{\text{Dielektrikum}} = C_{\text{Vakuum}} \cdot \varepsilon$



$$C = \frac{A\varepsilon_0}{d-b}$$

(Entspricht $\varepsilon \to \infty$)

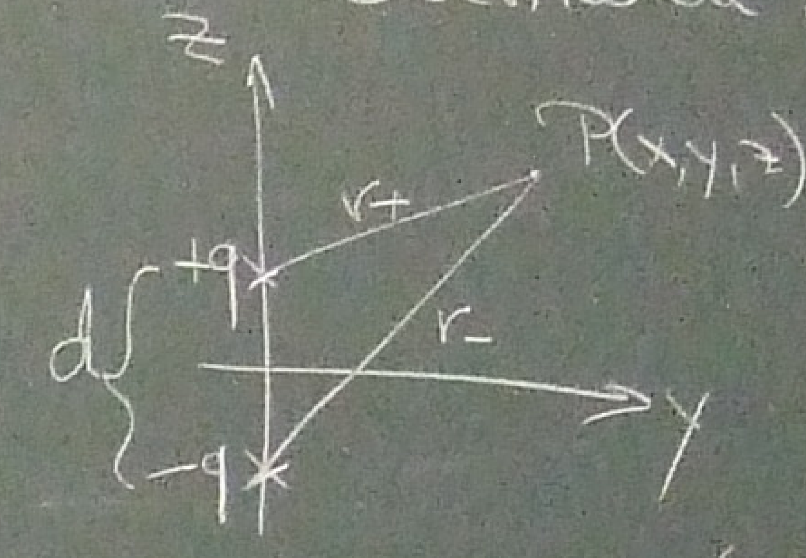
Oberflächenladungen in Dielektrikum: Ausrichtung von Dipolen (permanent oder induziert)



Induziertes Dipolmoment

$$\vec p = q\,\vec\delta$$

Beispiel: Potential eines elektrischen Dipols



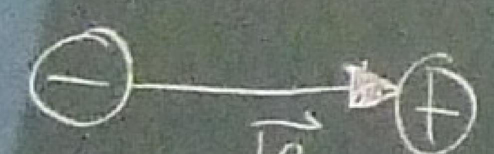
$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} + \frac{-q}{r_-}\right)$$

Für $r \gg d$

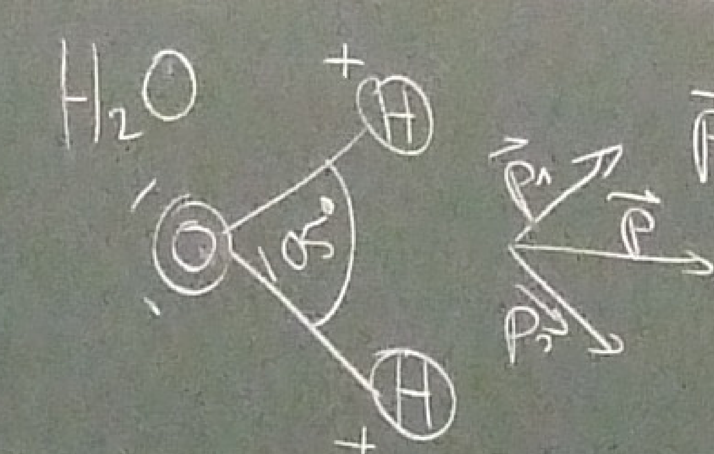
$$\vec p = q\,\vec d$$

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(q\cdot d)\,z}{r^3}$$

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3}$$



z.B.: H^+Cl^- Molekül: $p = 3{,}4\cdot 10^{-30}\,C\cdot m$



$$\vec p = \vec p_1 + \vec p_2$$

Polarisation der gesamten Probe

Gesamt-Dipol $\sigma_p \cdot A \cdot d \overset{!}{=} P \cdot A d \rightsquigarrow P = \sigma_p$

Polarisation $P = n\,\vec p = \dfrac{\text{Dipolmoment}}{\text{Volumen}}$

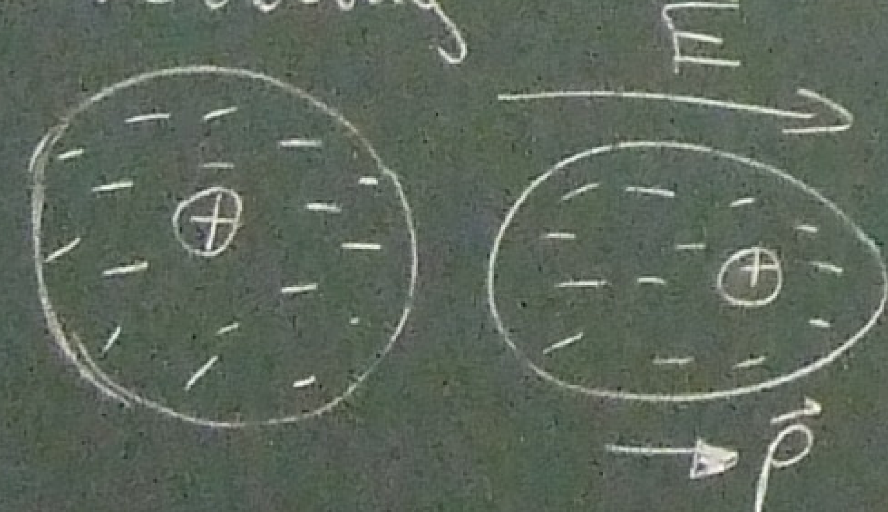
Polarisation $\vec P$ ist aus einzelnen Dipolen $\vec p$ aufgebaut:

$$\vec P = n\cdot\vec p$$

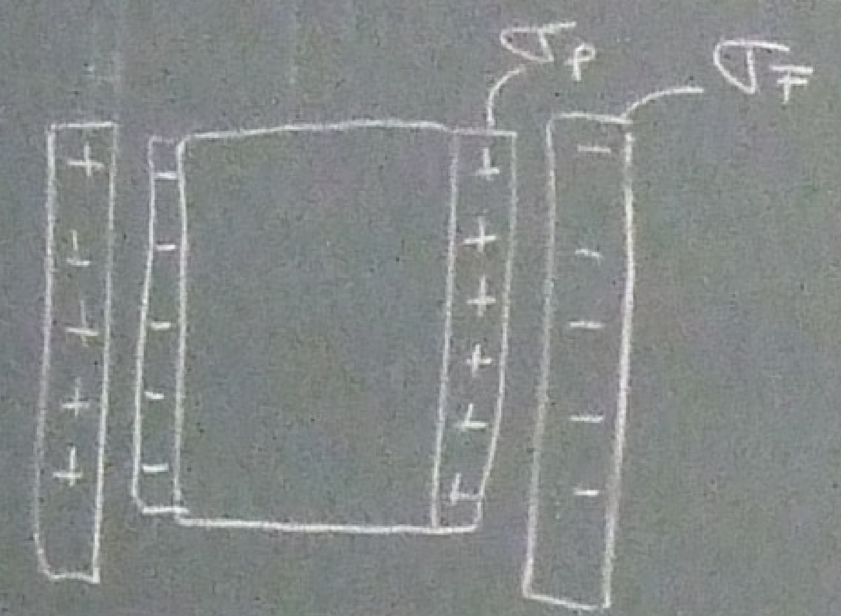
Oft: $\vec P = \chi\,\varepsilon_0\,\vec E$, χ dielektrische Suszeptibilität

in der Materie

Vorstellung



$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}\varphi$$



Ohne Dielektrikum

$E_0 = \frac{\sigma_F}{\varepsilon_0}$; σ_F freie Ladungsdichte auf den Kondensatorplatten.

Mit Dielektrikum

$$E = \frac{\sigma_F - \sigma_P}{\varepsilon_0} = E_0 - P/\varepsilon_0$$

$$E = E_0 - \frac{\chi\varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} \rightsquigarrow E + \chi E = E_0$$

$P = \chi\varepsilon_0 \vec{E}$

$$E(1+\chi) = E_0$$

$$\frac{E_0}{E} = 1+\chi = \frac{U_0}{U} = \frac{Q/U}{Q/U_0} = \frac{C}{C_0} = \varepsilon$$

$Q = Q_0$ $\quad$ $Q = C\,U$

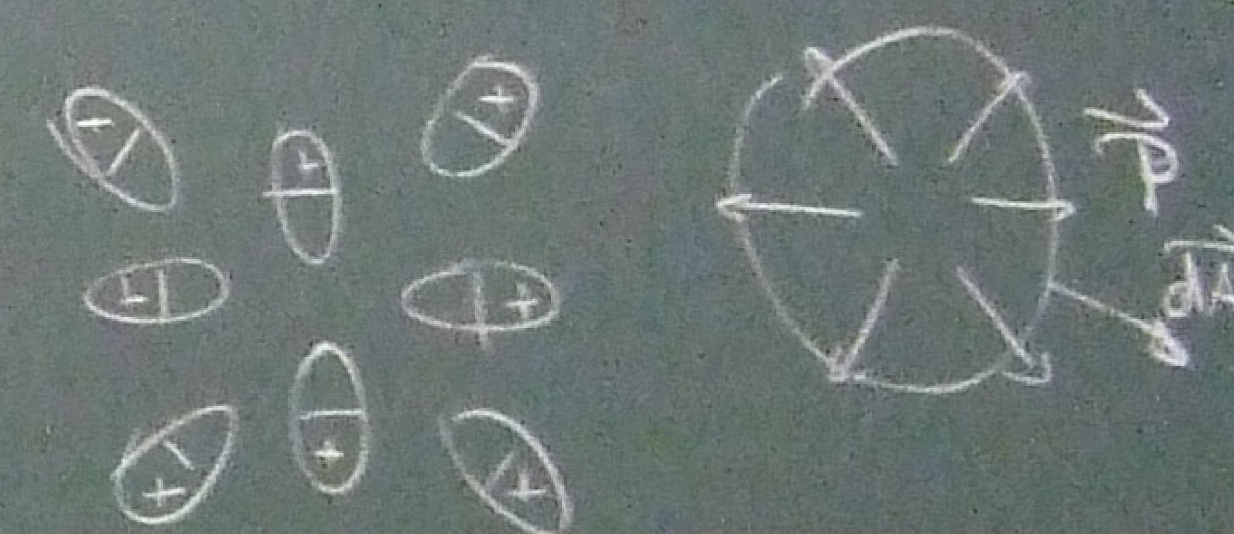
in Materie

$$\rightsquigarrow E = E_0/\varepsilon$$

	Luft	H_2O	Benzol	Porzellan	$SrTiO_3$ (10K)
ε	1,0006	80	2,28	4	12000

Kondensator-Bau: Dielektrikum mit hohem ε.
(Speicher)

Erweiterung des Gauß'schen Satzes in Materie



In Inneren dieser Materie entsteht Polarisationsladung

$$Q_P = -\oint_A \underset{\sigma_P}{\vec{P}}\, d\vec{A} = \iiint_V \rho_P\, dV$$

Damit Verallgemeinern: $\rho = \rho_F + \rho_P$

Gauß-Satz in Materie

$$\oint \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint (\rho_F + \rho_P)\, dV$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\iiint \rho_F\, dV}_{\text{freie Ladungen}} - \oint \vec{P}\, d\vec{A} \Rightarrow \boxed{\oint \left(\vec{E} + \vec{P}/\varepsilon_0\right) d\vec{A} = \frac{Q_F}{\varepsilon_0}}$$

Merke (und vergesse wieder)

Häufige Näherung $\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D} \rightsquigarrow \oint \vec{D}\, d\vec{A} = Q_f$

Dielektrische Verschiebung $\qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho_f$

Piezoelektrizität

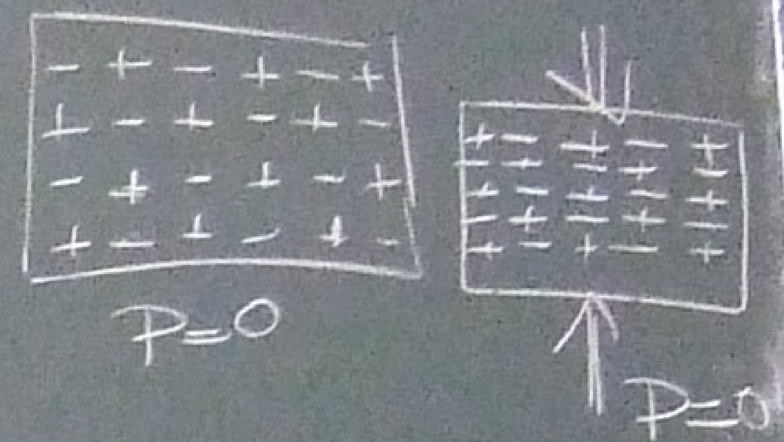
Dehnung eines Kristalls erzeugt elektrische Felder im Kristall

⇝ Potentialdifferenz an der Probe

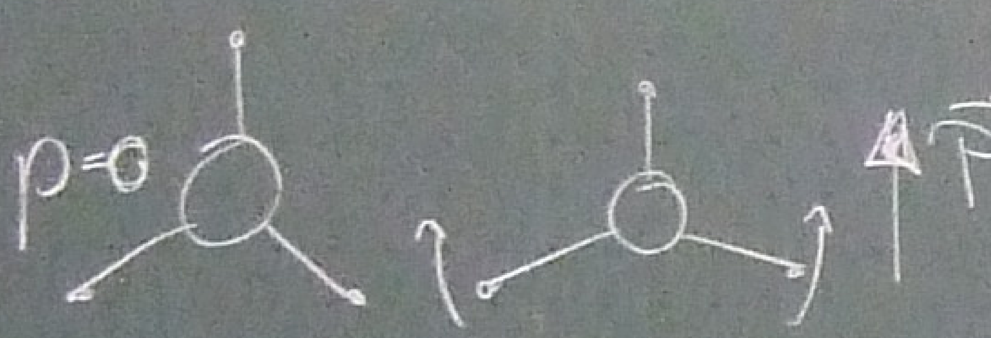
Umkehrung Angelegtes Feld erzeugt

Elektrostriktion Dehnung im Kristall

Bem: geht nur für bestimmte Kristallanordnungen



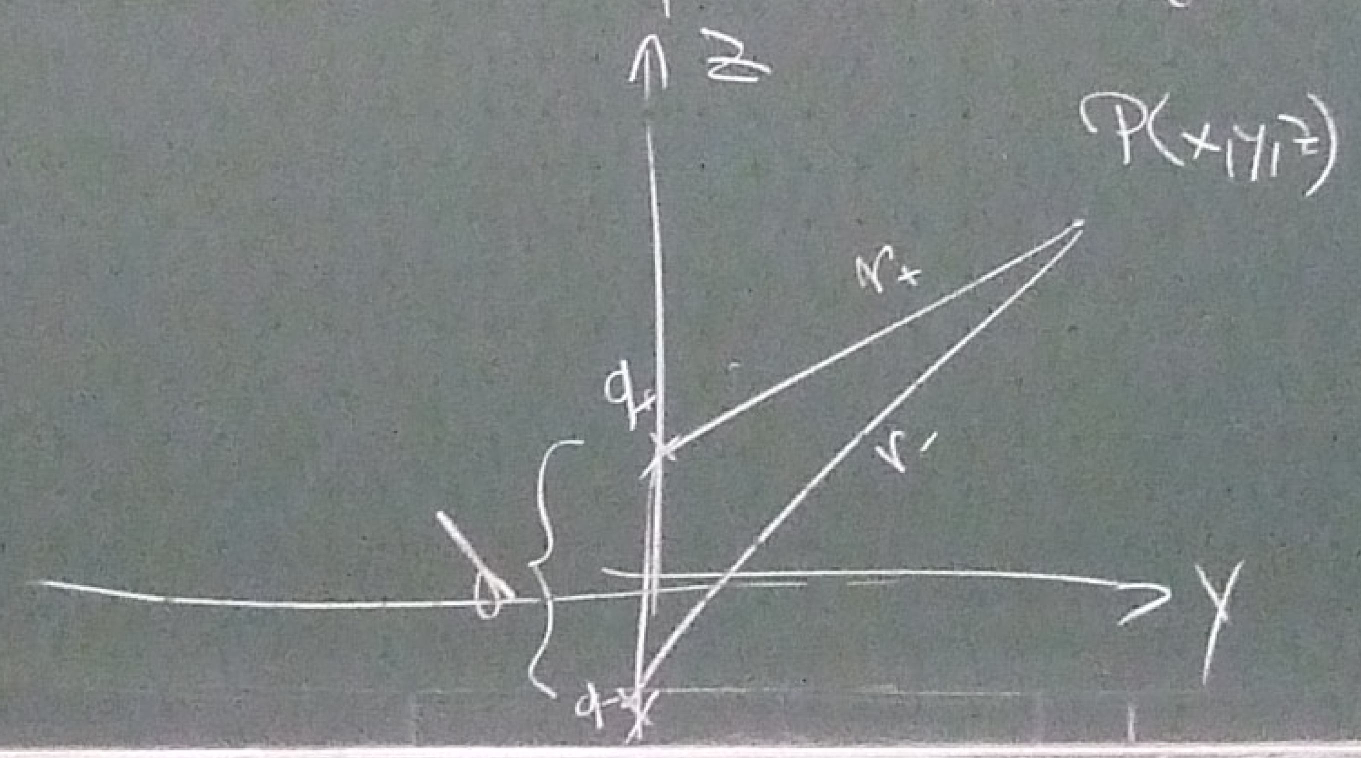
Typische Vertreter: Quartz SiO_2



$E = 1000\ \mathrm{V/cm} \qquad \Delta l / l = 10^{-7}$

$l = 1\,\mathrm{cm} \rightsquigarrow \Delta l = 10\,\mathrm{Å}$

Anwendung – genaue Justierung
– Schwingquartz
– piezoelektrische Feuerzeuge



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} + \frac{-q}{r_-}\right)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2}}\right]$$

Für $r \gg d$

$$\underbrace{(x^2+y^2+z^2}_{r^2 = x^2+y^2+z^2} \mp dz + d^2/4)^{-1/2} = \left[r^2\left(1 \mp \frac{zd}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right)\right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{zd}{2r^2} + \dots\right)$$

fällt raus

weg ±

$$(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{x}{2} + \dots$$

$$\varphi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \frac{zd}{2r^2} - \left(1 - \frac{zd}{2r^2}\right)\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\, qzd = \frac{\overbrace{(qd)}^{p}\, z}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$