# Transportvorgänge

## Gaskinetische Betrachtungen

a) Die mittlere freie Weglänge $\lambda$ ist definiert als der mittlere gerade Weg, den ein Molekül zwischen zwei Zusammenstößen mit anderen Molekülen ungestört zurücklegt. Mit der mittleren Geschw. $u_m$ hängt damit die mittlere Stoßzeit $\tau$ zwischen zwei Stößen zusammen.

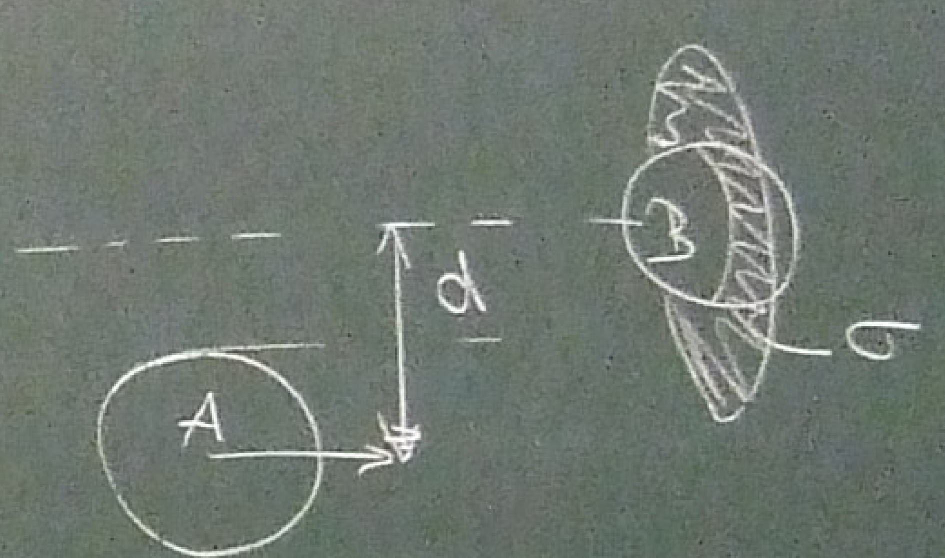
$$\lambda = u_m \cdot \tau = \sqrt{\frac{3kT}{m}}\,\tau$$

$$u_m = \sqrt{\overline{u^2}}$$

Annahmen:
1. Stark verdünntes Gas
2. Stoßdauer klein gegen $\tau$
3. Dreierstöße vernachlässigbar

b) Der Wirkungsquerschnitt (Stoßquerschnitt)

Idealisiert man die Moleküle durch starre, vollelastische Kugeln mit festem Durchmesser $d$ so kann man als geometrischen Stoßquerschnitt $\sigma$ die schraffierte Fläche angeben: $\sigma = \pi d^2$

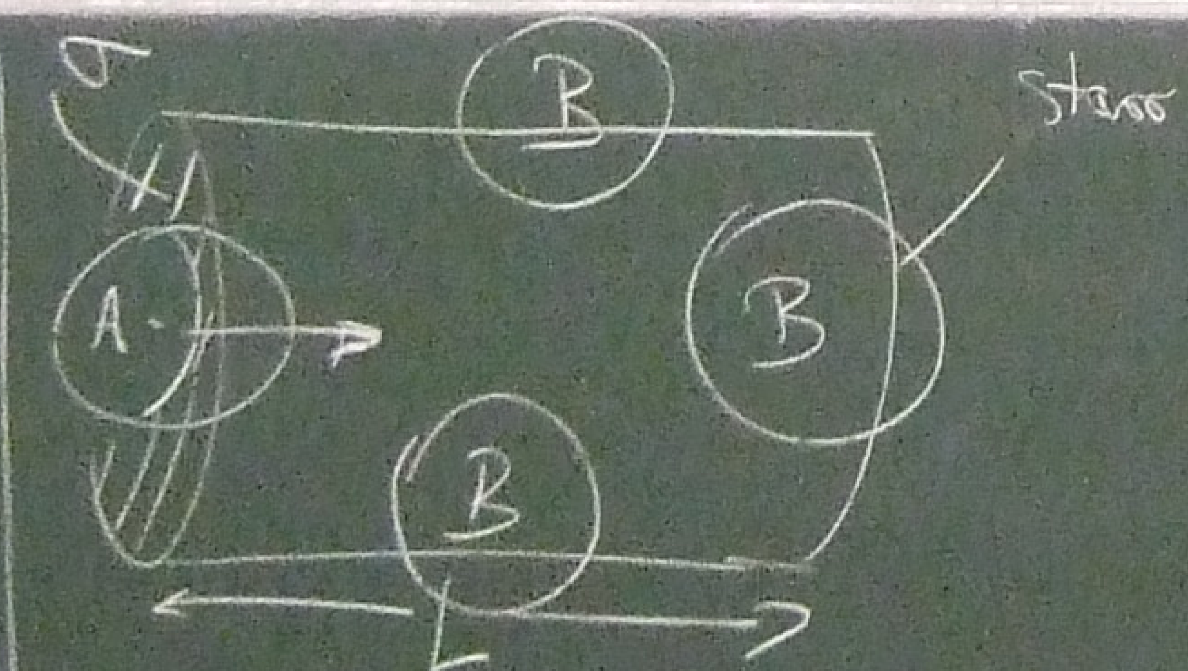



Im realen Fall sind Moleküle nicht starr und $\sigma$ muß exp. bestimmt werden

c) Zusammenhang zwischen $\lambda$, $\sigma$ und der Molekülzahldichte $n = \frac{N}{V}$

oder:

$$\lambda = \frac{1}{\sigma \cdot n}$$




Modellvorstellung

Gestoßene Moleküle B ruhen. Molekül A bewegt sich mit $u_m$ durch ein Gas mit $n$ starren Molekülen B pro Volumeneinheit. In dem Zylinder trifft A $\sigma \cdot L \cdot n$ Moleküle B

Für $\sigma \cdot L \cdot n = 1 \rightsquigarrow L = \lambda$

Wegen $n = \frac{N}{V} = \frac{p}{kT} \rightsquigarrow \lambda = \frac{kT}{\sigma \cdot p}$

Beispiel: $H_2$ $\quad d = 0{,}2\,nm$

$T = 300K$, $p = 1\,bar$

$\rightsquigarrow \lambda = 300\,nm \gg d$

$\tau = 2 \cdot 10^{-10}\,s$ $\quad (1/\tau = 5\,GHz$

mit $u_m = 2000 \frac{m}{s}$

## Transportvorgängen in Gasen

Wir fassen zusammen durch thermische Molekülbewegung ausgelösten Transport.

von Teilchen $\rightsquigarrow$ Diffusion

von Energie $\rightsquigarrow$ Wärmeleitung

von Impuls $\rightsquigarrow$ Viskosität (innere Reibung)


Wir betrachten die Moleküle, die den Querschnitt A passieren und bilden den (Überschuß)-Strom in x-Richtung.

Die Fläche A wird im Zeitintervall $\Delta t$ durchstoßen

von links $\quad \Delta N^+ = A\lambda \frac{n}{6} \cdot \frac{\Delta t}{\tau} \underset{\lambda = u_m \tau}{=} \frac{1}{6} A \cdot [n \cdot u_m]_{x-\lambda} \cdot \Delta t$

von rechts: $\quad \Delta N^- = \frac{1}{6} A\, [n \cdot u_m]_{x+\lambda} \cdot \Delta t$

Nettodurchsatz pro $\Delta t$ in positiver x-Richtung:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\Delta N^+}{\Delta t} - \frac{\Delta N^-}{\Delta t} = \frac{1}{6} A \left[ n u_m\big|_{x-\lambda} - n u_m\big|_{x+\lambda} \right]$$

$$\boxed{\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{A\lambda}{3} \cdot \frac{\partial (n \cdot u_m)}{\partial x}}$$

Hieraus folgt:

a) Diffusion von Molekülen ($T = const \rightarrow u_m = const$)

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\underbrace{\frac{A\lambda}{3} u_m}_{\text{Diffusionskonstante } D} \frac{\partial n}{\partial x} = A \cdot \underset{\text{Stromdichte}}{j} \rightsquigarrow \boxed{\underset{\substack{\text{Teilchenzahl} \\ \text{pro Fläche und Zeit}}}{\vec{j}} = -D \cdot \nabla n}$$

1. Fick'sches Gesetz.

0.2 nm ≤ 300 nm

Übungsblatt.

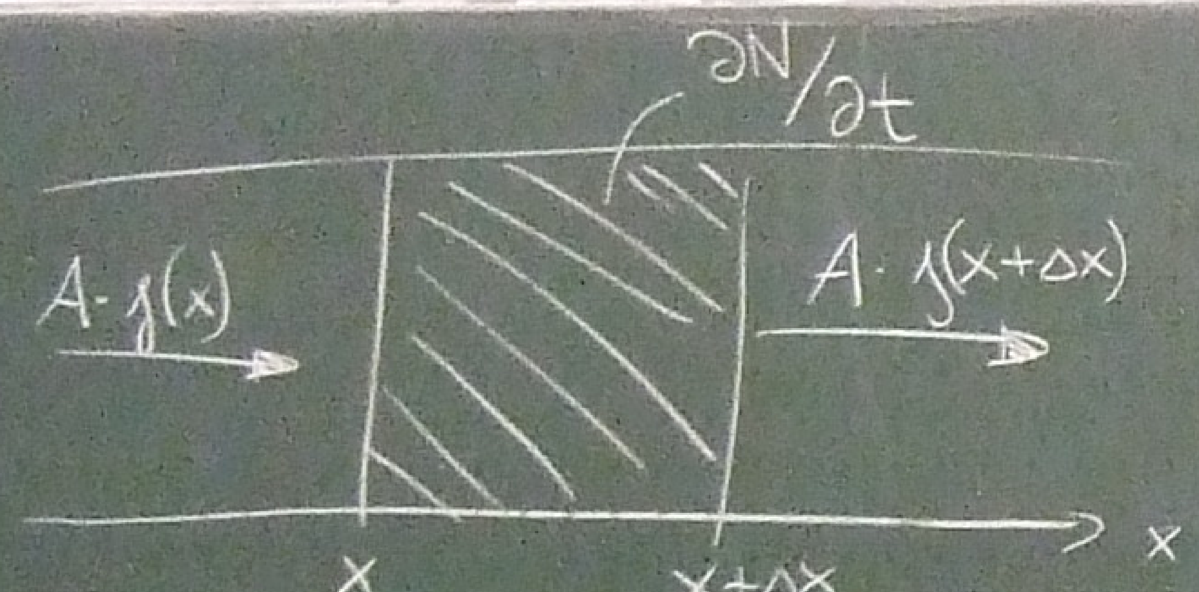
– h – ... $10^{-34}$

– 2. $\mu_i(T,c_i) = \mu_i^{(0)} + RT \ln \frac{c_i}{\sum c_i^{(0)}} = c^{(0)}$

## 1. Ficksche Gesetz

der Teilchenstrom ist der Fläche, der Diffusionskonstanten und dem Konzentrationsgefälle $\nabla n$ proportional.

.... Teilchenstromdichte $j$ .... $j = -D\cdot\nabla n \quad \big|\cdot A$




Ist die Teilchendichte $n$ zeitlich nicht konstant (nicht stationär), so liefert die Kontinuitätsgleichung zusammen mit dem 1. Fick'schen Gesetz:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \underbrace{A\cdot\Delta x}_{V}\frac{\partial n}{\partial t} = -A\left[j(x+\Delta x) - j(x)\right] = A\left[j(x) - j(x+\Delta x)\right]$$

$$= -A\cdot\Delta x\cdot\frac{\partial j}{\partial x} \rightsquigarrow \boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}}$$ Kont. Gleichung

## b) Diffusion von Energie → Wärmeleitung

Transport von Wärme $Q = N\bar{E}_{\text{Molekül}} \left(= \frac{Nf}{2}kT\right)$

folgt analog:

$$\frac{\partial(N\bar{E}_{\text{Molekül}})}{\partial t} = -A\frac{\lambda}{3}\frac{\partial(n \cdot u_m \cdot \bar{E}_{\text{Molekül}})}{\partial x}$$

$$= -A\,\underbrace{\frac{\lambda u_m}{3} \cdot n\frac{f}{2}k}\,\frac{\partial T}{\partial x}$$

$\lambda^* = k^*$ : Wärmeleitfähigkeit

Einheit $\frac{W}{mK}$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -A\,k^*\frac{\partial T}{\partial x}$$

Der Wärmestrom ist proportional zur Fläche, Wärmeleitfähigkeit $k^*$ und zum Temperaturgefälle proportional. Übung - $k^* \sim \sqrt{T}$

- Diff. T

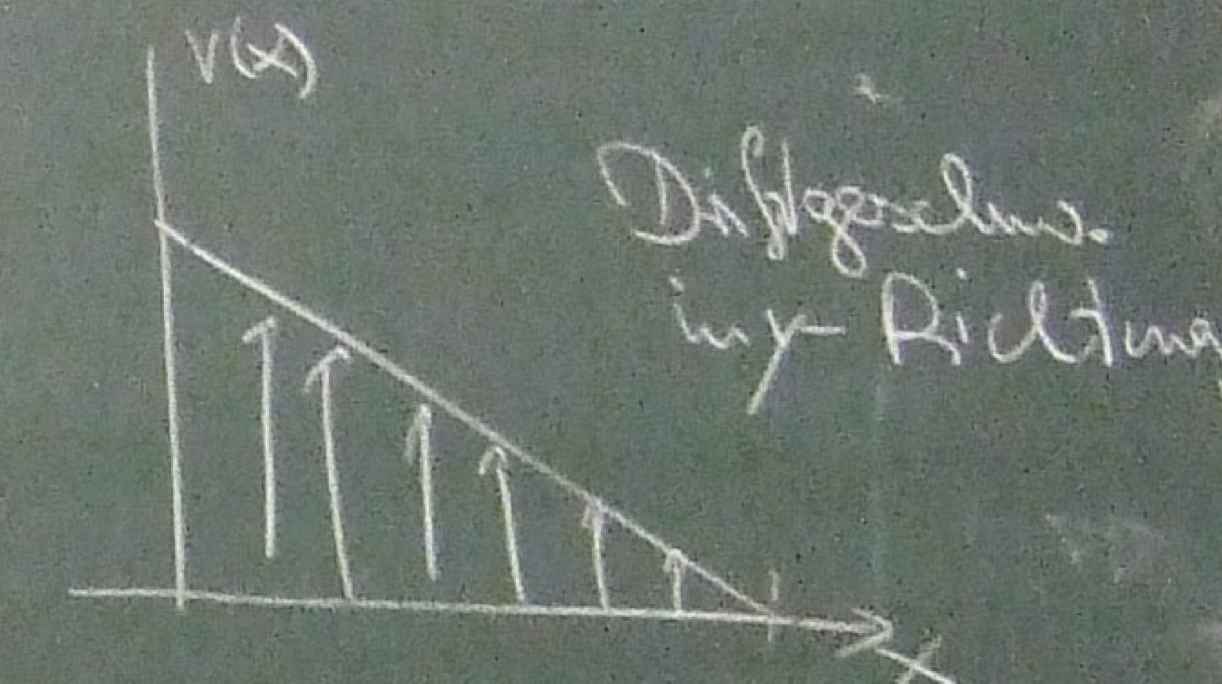
## c) Diffusion von zusätzlichem Impuls → Innere Reibung.

$$\frac{\partial(N m \cdot v)}{\partial t} = -A\frac{\lambda}{3}\frac{\partial(n \cdot u_m \cdot m\,v)}{\partial x}$$

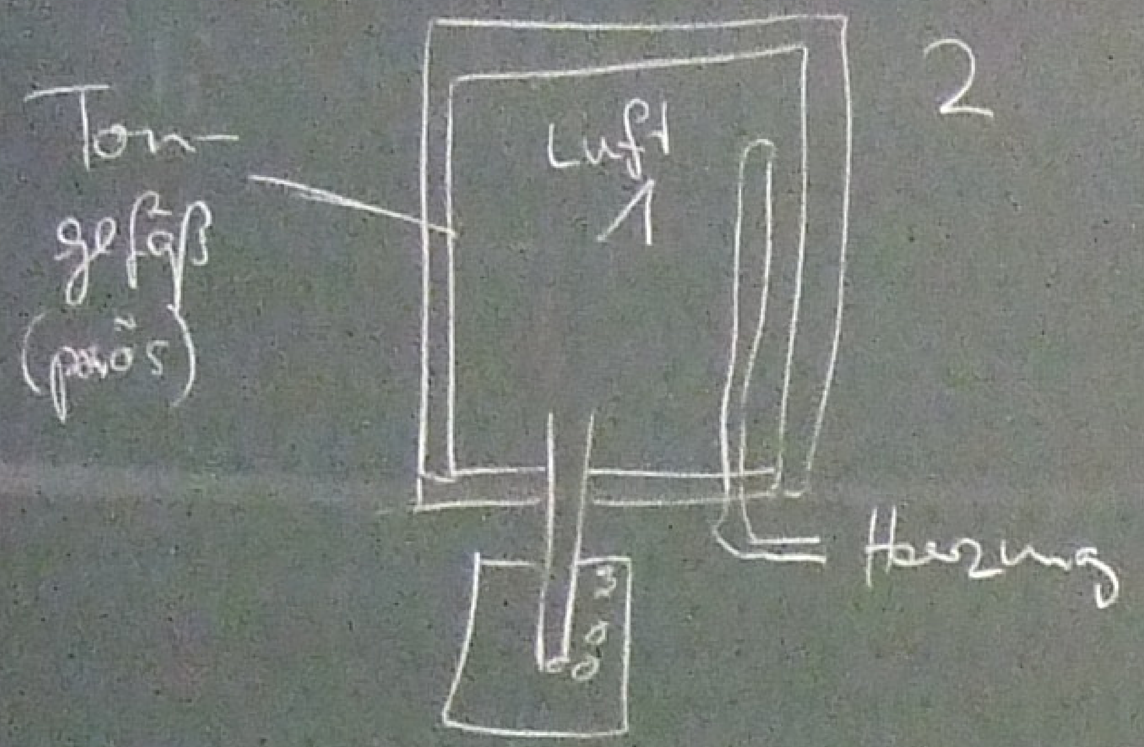
Reibungskraft ($F = \dot{p}$)

$$F_y = -A\,\underbrace{\frac{\lambda u_m}{3} \cdot n \cdot m}_{\eta\text{: Viskosität}}\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= -A\eta\frac{\partial v}{\partial x}$$




Die Reibungskraft zwischen (Gas-)schichten unterschiedlicher Strömungsgeschwindigkeit ist prop. zur Fläche, der Viskosität und zum Geschwindigkeitsgefälle.




## Wechselseitige Verknüpfung von Transportvorgängen

a) Temperaturdifferenzen erzeugen Druckdifferenzen
(Knudsen-Effekt)

Ein Teil der Zimmerluft befindet sich in einer geheizten Ton-
zelle. Man beobachtet einen kontinuierlichen Luftstrom.

Deutung mittels Transportgleichung.

Stationarität: $\frac{\partial N}{\partial t} = 0 \rightsquigarrow (n u_{m_1}) = (n u_{m_2})$

$= \frac{\partial (n \cdot u_m)}{\partial x}$

mit $p = nkT$, $u_m^2 \sim kT$

$\rightsquigarrow \frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$ ↯ $pV = NkT$, $p \sim T$

Unterschiedliche Temperatur auf beiden Seiten der porösen Wand erzeugt gleichgerichteten Druckunterschied.

Anschaulich